Checkliste Folgen und Reihen

Fähigkeit	Beispielaufgabe	Verstanden	Mit Hilfe	Nicht verstanden
1. Ich kenne die Definition und die Schreibweise einer Folge.				
2. Ich kenne den Unterschied zwischen Folgen und Funktionen und ihre jeweiligen Schreibweisen.	Welches ist die richtige Schreibweise einer Folge? a) $a_n = n^2$ b) $y = x^2$ c) $a_n = \frac{3}{4} \cdot n$ d) $y = \frac{3}{4} \cdot x$			
3. Ich kann die Folgeglieder berechnen und von einfachen Zahlenreihen die Vorschrift der Folge angeben.	a) Bestimme die ersten fünf Folgeglieder der Folge: $a_n = 2n^2$. Wie lautet das 10. Folgeglied? b) Wie lautet die Folge zu diesen Folgegliedern? 2 4 6 8			
4. Ich kann eine Folge anhand einer Wertetabelle zeichnen.	Zeichne $a_n = \frac{1}{n+1}$			
5. Ich weiß, was eine alternierende Folge ist.	Welche der Folgen ist eine alternierende Folge? a) $a_n = \frac{1}{-(n)^2}$ b) $a_n = \frac{1}{(-n)^2}$ c) $a_n = (-2)^n$ d) $a_n = 2^{-n}$			
6. Ich kenne die Begriffe rekursiv und explizit und kann sie anwenden.	a)Stelle eine Folgenvorschrift für eine rekursive Folge und eine explizite Folge auf. b)Welches ist eine rekursive Folge? a) $a_n = \frac{1}{n+1}$ b) $a_n = \frac{1}{a_{n+1}}$ $a_1 = 2$ c) $a_n = a_{n-1} \cdot 5$ $a_1 = 1$			
7. Ich kann die rekursive Form einer Folge in die explizite Form umwandeln.	Haben wir nur einmal bei S. 311 Beispiel 3a gemacht.			
8. Ich kann alle Eigenschaften einer Folge benennen.	Benenne die Eigenschaften von Folgen, die wir untersucht haben.			
9. Ich kenne die Definition von Monotonie.				

10. Ich kann mit Hilfe der Definition nachweisen, ob eine Folge monoton ist oder nicht bzw. sowohl Monoton fallend als auch monoton steigend ist und weiß wie man dies aufschreibt.	Weise die Monotonie dieser Folgen nach: a) $a_n = n^2$ b) $a_n = (-1)^n$ c) $a_n = \frac{1}{n}$ d) $a_n = 3$			
11. Ich kann mithilfe der Differenz Monotonie nachweisen.	Zeige mithilfe der Differenz, dass die Folge $a_n = \frac{1-2n}{n}$ streng monoton fallend ist.			
12. Ich weiß, was eine obere bzw. untere Schranke ist.				
13. Ich kenne die Definition für Beschränktheit.				
14. Ich kann die Beschränktheit von Folgen bestimmen und kann dies bei einer gegebenen Folge nachweisen. Ebenso weiß ich, wie man nachweist, ob eine Folge nicht beschränkt ist und kann dies formal korrekt aufschreiben.	Untersuche folgende Funktionen auf Beschränktheit: a) $a_n = \frac{1}{2^n}$ b) $a_n = -0{,}8^n - 2$ c) $a_n = (-1)^n$ d) $a_n = n^2$			
15. Ich bin mit folgenden Begriffen vertraut: Grenzwert, ε, ε-Umgebung, $\lim_{n\to\infty}$, $a_n = \frac{1}{n}$, konvergent und divergent.				
16. Ich kenne die Definition für den Grenzwert				
17. Ich kann den Grenzwert einer Folge berechnen.	Berechne den Grenzwert der Folge $a_n = 3 + \frac{2}{n}$			
18. Ich kann bestimmen, ab welchem n alle Folgeglieder in der ε-Umgebung liegen.	Gegeben seien die Folgen: a) $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ und b) $a_n = 5n - 3$ Ab welchem n liegen alle Folgeglieder innerhalb der ε-Umgebung bei einem ε von 0,01?			
19. Ich kann mithilfe der Definition nachweisen, ob eine Folge konvergent ist oder nicht.	Gleiche Aufgabe wie bei Nr. 18.			
20. Ich weiß, was eine Nullfolge ist und kann dies nachweisen.	Sind a) $a_n = \frac{1}{n}$; b) $a_n = \frac{1}{n} + 2$ Nullfolgen?			
21. Ich kann mithilfe der Nullfolge nachweisen, ob eine Folge konvergiert oder nicht.	Bestimmen sie das Konvergenzverhalten der Folgen mithilfe der Nullfolge: a) $a_n = 2\left(\frac{1}{n+1} + 1\right)$ b) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + 2}{n^2}$			
22. Ich kenne das Einschlusskriterium und kann es verwenden.	Bestimme die Konvergenz anhand des Einschlusskriteriums. $a_n = \frac{1}{2 \cdot n}$			

23. Ich weiß, dass der Nachweis von Monotonie und Beschränktheit ausreicht um zu zeigen, dass eine Folge konvergent ist.				
24. Ich kenne die Grenzwertsätze.	Nenne die drei Grenzwertsätze.			
25. Ich kann die Schreibweise mit $\lim_{n\to\infty}$ verwenden.	Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^2}{n^2}$			
26. Ich weiß, dass ich, wenn ich den Ausdruck mit n ausklammere, schon recht schnell sehen kann, wie der Grenzwert aussehen wird.	a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n}$ b) $a_n = \frac{-2n^2+n-1}{n^2}$ c) $a_n = \frac{\sqrt{n}-2}{n}$			

Lösungen

1. Siehe Buch
2. Folgen: a, c Funktionen: b, d

3.) a) 2 8 18 32 50 $a_{10} = 200$ 10. b) $a_n = 2n$

4.) Wertetabelle:

n	1	2	3	4	5
a(n)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

Zeichnung:

5. Alternierende Folge: b und c Wem dies nicht klar ist, einfach zeichnen.

6. Eigene Lösung b und c sind rekursive Folgen

7. Siehe Buch

8. Monotonie und Beschränktheit und Konvergenz

9. Siehe Buch

10.

a) $a_n = n^2$

Ersetze n durch $n+1$ und zeige so, dass a_{n+1} (echt) größer oder (echt) kleiner als a_n ist.

$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 = a_n$. Also $a_{n+1} > a_n$.

⇨ Die Folge ist streng monoton wachsend.

b) $a_n = (-1)^n$

a_n ist nicht monoton, da gilt:

$a_1 = (-1)^1 = -1$ und $a_2 = (-1)^2 = 1$

$a_1 < a_2$, aber $a_3 = (-1)^3 = -1$

$a_2 > a_3$.

c) $a_n = \frac{1}{n}$

Es gilt: $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ Also: a_n ist streng monoton fallend

d) $a_n = 3$

Es gilt: $a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3$

Ferner: $a_2 \geq a_1$ und $a_3 \leq a_2$

Die Folge ist sowohl monoton fallend als auch monoton steigend

11) Zu zeigen: $a_{n+1} - a_n$ ist (echt) größer oder (echt) kleiner 0

$$\frac{1-2(n+1)}{n+1} - \frac{1-2n}{n} = \frac{1}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{2n}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - 2 - \left(\frac{1}{n} - 2\right) = \frac{1}{n+1} - 2 - \frac{1}{n} + 2 =$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1n}{(n+1)n} - \frac{1(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = \frac{n-n-1}{(n+1)n} = -\frac{1}{(n+1)n} < 0.$$

=> Die Folge ist monoton fallend

12) Siehe Buch

13) Siehe Buch

14)

a) $a_n = \frac{1}{2^n}$

Die Folge ist streng monoton fallend. Daher gilt

$S = a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

S = 0 , da $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathrm{N}^*$

⇨ Die Folge ist beschränkt.

b) $a_n = -0{,}8^n - 2 = -\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2 = -\left(\frac{4}{5}\right)^n - 2$

Die Folge ist streng monoton wachsend. Daher gilt:

S = -2, da $a_n \leq -2 \quad n \in \mathrm{N}^*$

s = $a_1 = -\left(\frac{4}{5}\right)^n - 2 = -2{,}8 \Rightarrow$ Die Folge ist beschränkt.

c) $a_n = (-1)^n$

S = 3 und s = -3 $\Rightarrow$ Die Folge ist beschränkt. Die Zahlen sind willkürlich und weder die kleinste obere Schranke noch die größte untere Schranke! Aber eindeutig zwei Schranken.

(Von witzigen Schrankenbeispielen wie S = 18384628347 bitten wir abzusehen.)

Ebenso würde man vorgehen bei $a_n = 2$.

d) $a_n = n^2$

Die Folge $a_n = n^2$ ist streng monoton steigend. Daher hat sie keine obere Schranke und sit folglich nicht beschränkt, auch wenn sie eine untere Schranke s = 1 hat.

15) Siehe Buch

16) Siehe Buch

17) Grenzwert berechnen von $a_n = 3 + \frac{2}{n}$.

Weg: Lege eine Wertetabelle an mit großen, aber einfachen Zahlen, z.B. n = 10, n = 100, n = 1000. Dann erkennt man, dass sich die Folge an +3 annähert. Daraus folgt, dass der Grenzwert vermutlich bei 3 liegt. Um dies zu bestätigen, verfahre wie in Aufgabe 18-22.

18) Geg. ε = 0,01 $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$

1. Grenzwert g berechnen Siehe A 17. Vermuteter Grenzwert: g = 2

2. Gleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ aufstellen und nach n auflösen.

$|\frac{2n-1}{n+1}-2| < \varepsilon$ $|\frac{2n-1}{n+1}-\frac{2(n+1)}{n+1}| < \varepsilon$ $|\frac{2n-1}{n+1}-\frac{2n+2}{n+1}| < \varepsilon$ $|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}| < \varepsilon$

$|\frac{-3}{n+1}| < \varepsilon$ $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$ $\frac{3}{\varepsilon} < n+1 \mid -1$ $\frac{3}{\varepsilon} -1 < n$

3. ε einsetzen. Wenn kein ε gegeben ist, selbst ein kleines ε auswählen. $\frac{3}{0{,}01} -1 < n$

$299 < n$ $n > 299$

Also für $n \leq 300$ liegen alle Folgeglieder in der ε Umgebung.

18b) Geg.: ε = 0,01 $a_n = 5n-3$

1. Grenzwert berechnen.
Dies scheitert schon hier, da man keinen Grenzwert errechnen kann. Die Folge ist monoton steigend und besitzt keine obere Schranke.

19 Indem man wie in Aufgabe 18 ausgerechnet hat, dass es ein n gibt ab dem alle Folgeglieder in der ε-Umgebung liegen, hat man auch automatisch mit der Definition nachgewiesen, dass die Folge konvergiert bzw. nicht konvergiert.

20

a) Zu zeigen: $a_n = \frac{1}{n}$ ist Nullfolge

Idee: Dies ist eine Nullfolge, wenn die Folge gegen 0 konvergiert, also den Grenzwert 0 besitzt. Das können wir ja mit Aufgabe 19 zeigen.

$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\frac{1}{\varepsilon} < n$

Wählen wir nun für ε eine beliebig kleine Größe, z.B. ε = 0,001, dann gilt:

$\frac{1}{0{,}001} < n$ $n > 1000$ Also ab $n \geq 1001$ liegen alle Folgeglieder in der ε-Umgebung und der Grenzwert liegt bei 0. Also haben wir auch gezeigt, dass es sich um eine Nullfolge handelt. Etwas umständlich, ist aber so.

20 b)

$a_n = \frac{1}{n} + 2$ Dies ist natürlich keine Nullfolge, denn sie strebt gegen 2. Was passiert, wenn wir den Nachweis wie oben versuchen?

$|\frac{1}{n} + 2 - 0| < \varepsilon$ $|\frac{1}{n} + 2| < \varepsilon$ $\frac{1}{n} + 2 < \varepsilon$ $\frac{1}{n} + 2 < 0{,}001 \mid -2$ mit ε = 0,001

$\frac{1}{n}$ < - 1,999 | : (-1,999) Nicht vergessen aus dem Kleinerzeichen ein Größerzeichen zu machen.

$\frac{1}{-1{,}999}$ > n n < 0,5. Dies steht aber im Widerspruch zu $n \in \mathrm{N}^*$, also ist dies keine Nullfolge.

Anmerkung: Leichter geht dies oftmals mit der Limesschreibweise.

21 $a_n = 2\left(\frac{1}{n+1} + 1\right)$

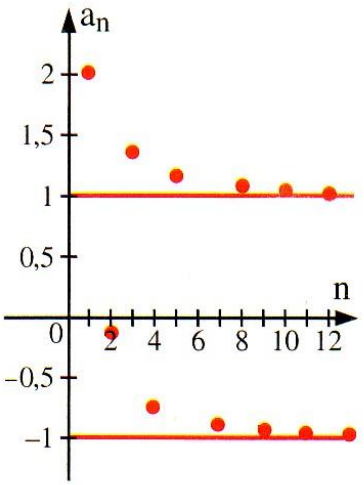
Zeige, dass $|a_n - g|$ eine Nullfolge ist!

Vermuteter Grenzwert: g = 2

$| 2\left(\frac{1}{n+1}+1\right) - 2 | = | \left(\frac{2}{n+1}+2\right) - 2 | = |\frac{2}{n+1}| = \frac{2}{n+1}$. Klar, dies ist eine Nullfolge, daher konvergiert die Folge gegen 2.

b) $a_n = \frac{(-1)^n n^2 + 2}{n^2}$

$\frac{(-1)^n n^2 + 2}{n^2} = \frac{(-1)^n n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2} = (-1)^n + \frac{2}{n^2}$. Klar $\frac{2}{n^2}$ ist eine Nullfolge, daher konvergiert die Folge.
Allerdings liefert der alternierende Teil zwei Grenzwerte, nämlich -1 und +1. Da aber der Grenzwert eindeutig sein muss, konvergiert die Folge nicht.



22. Zeige $a_n = \frac{1}{2 \cdot n}$ mit dem Einschlusskriterium, dass die Folge konvergiert.

Idee: Finde eine Folge, von der du weißt, dass sie konvergiert und die größer ist und ebenso eine konvergente, die kleiner ist.

Sei $b_n = 0$ und $c_n = \frac{1}{n}$. Klar: Es gilt: $b_n < a_n < c_n$. Daher konvergiert die Folge mit dem Einschlusskriterium. Wem dies nicht klar ist, einmal zeichnen.

23. Wer zeigt, dass eine Folge beschränkt ist und streng monoton fallend oder steigend, hat damit automatisch gezeigt, dass diese Folge auch konvergiert.

24. Siehe Buch

25. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 2 = 0 + 2 = 2$

26.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{2^n} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1 - 0 = 1$

b) $a_n = \frac{-2n^2 + n - 1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2 + n - 1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(-2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(-2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = -2$

c) $a_n = \frac{\sqrt{n} - 2}{n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - 2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} - 2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{n})}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 - 0 = 0$

Fertig